

## 2.1. Κυκλική κίνηση.

### 2.1. Σχέσεις μεταξύ γραμμικών και γωνιακών μεγεθών στην ΟΚΚ.

Κινητό κινείται σε περιφέρεια κύκλου ακτίνας 40m με ταχύτητα μέτρου 4m/s.

- i) Ποια είναι η περίοδος και ποια η συχνότητά του;
- ii) Πόσο είναι το μήκος του τόξου που διαγράφει σε 20s και πόση είναι η αντίστοιχη επίκεντρη γωνία σε rad και σε μοίρες;

### 2.2. Ομαλή Κυκλική κίνηση.

Ένα σώμα μάζας 2kg κινείται με ταχύτητα σταθερού μέτρου, οπότε μέσα σε χρόνο 2s, διαγράφει γωνία  $45^\circ$ , σε κυκλική τροχιά ακτίνας  $R=2m$ . Ζητούνται:

- i) Η γωνιακή ταχύτητα.
- ii) Η γραμμική ταχύτητα περιστροφής.
- iii) Η συνισταμένη δύναμη που ασκείται στο σώμα.
- iv) Η μεταβολή της ταχύτητας σε χρονικό διάστημα 8s.

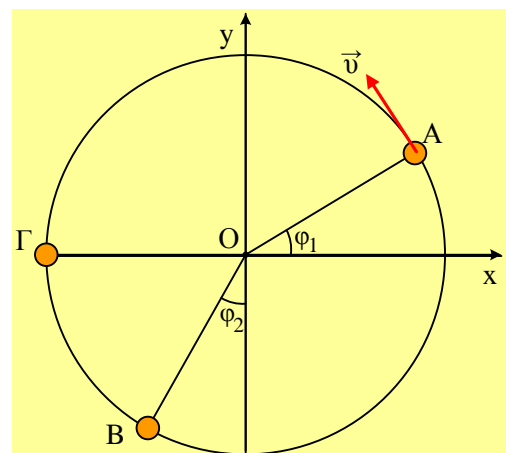
### 2.3. Γραφικές παραστάσεις στην κυκλική κίνηση.

Ένας δίσκος περιστρέφεται κάνοντας 2 στροφές το δευτερόλεπτο. Έστω Α ένα σημείο του δίσκου που απέχει απόσταση  $r$  από το κέντρο του. Να γίνουν οι γραφικές παραστάσεις:

- i) Της γωνιακής ταχύτητας, της γραμμικής ταχύτητας, του μήκους του τόξου και της γωνίας που διαγράφει, σε συνάρτηση με το χρόνο, αν η ακτίνα  $r$  παραμένει σταθερή και
- ii) Της γωνιακής ταχύτητας και της γραμμικής ταχύτητας σε συνάρτηση με την ακτίνα περιστροφής  $r$ .

### 2.4. Υπολογισμοί στην ομαλή κυκλική κίνηση.

Μια μικρή σφαίρα, μάζας 2kg, εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση, σε κύκλο κέντρου  $O$  και ακτίνας 0,5m, όπως στο σχήμα. Τη χρονική στιγμή  $t=0$  η σφαίρα περνά από τη θέση Α, ενώ φτάνει για πρώτη φορά στη θέση Β τη χρονική στιγμή  $t_1=0,35s$ , όπου οι σημειωμένες γωνίες είναι  $\varphi_1=\varphi_2=30^\circ$ .

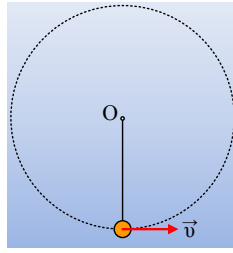


- i) Ποια η γωνιακή ταχύτητα και ποια η περίοδος περιστροφής του σώματος;
- ii) Ποια χρονική στιγμή η σφαίρα περνά από το σημείο Γ για τέταρτη φορά;
- iii) Να υπολογιστεί το μέτρο της δύναμης που ασκείται στη σφαίρα, καθώς και το έργο της στο χρονικό διάστημα  $0-t_1$ .

### 2.5. Κεντρομόλος δύναμη.

Ένα σώμα μάζας 4kg διαγράφει κατακόρυφο κύκλο δεμένο στο άκρο νήματος μήκους 2m. Τη στιγμή που

περνάει από το χαμηλότερο σημείο της τροχιάς του, έχει ταχύτητα μέτρου 5m/s.



Να σχεδιάσετε τις δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα στη θέση αυτή και να υπολογίσετε τα μέτρα τους. Δίνεται  $g=10\text{m/s}^2$ .

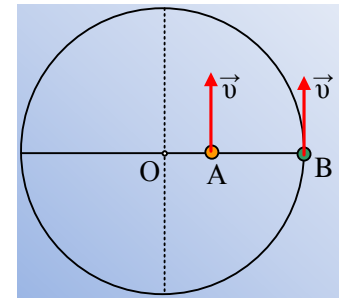
### 2.6. Σώμα διαγράφει κατακόρυφο κύκλο.

Ένα σώμα μάζας 2kg είναι δεμένο στο άκρο νήματος μήκους  $\ell=2\text{m}$  και διαγράφει κατακόρυφο κύκλο.

- Αν στο χαμηλότερο σημείο της τροχιάς η ταχύτητα του σώματος είναι 4m/s, ποια η τάση του νήματος, στην θέση αυτή;
- Ποια είναι η ελάχιστη ταχύτητα, την οποία πρέπει να έχει το σώμα στο ψηλότερο σημείο της τροχιάς του, ώστε να μπορεί να διαγράψει με ασφάλεια τον κύκλο;  $g=10\text{m/s}^2$ .

### 2.7. Δύο κινητά σε ομόκεντρους κύκλους

Δυο σώματα A και B ξεκινούν ταυτόχρονα όπως στο σχήμα, να κινούνται ομαλά σε κυκλικές τροχιές με ακτίνες 1m και 2,5m, με το ίδιο κέντρο O και με ταχύτητες ίσων μέτρων  $v_1=v_2=v=3\text{m/s}$ .

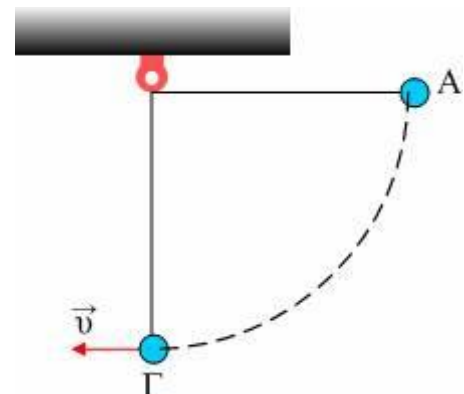


- Σε πόσο χρόνο για πρώτη φορά, οι επιβατικές τους ακτίνες σχηματίζουν γωνία  $90^\circ$ ;
- Σε πόσο χρόνο οι επιβατικές τους ακτίνες θα συμπέσουν για πρώτη φορά;
- Σε πόσο χρόνο, επίσης για πρώτη φορά, τα δυο σώματα θα βρεθούν ταυτόχρονα στις αρχικές τους θέσεις;

### 2.8. Δύο κινητά σε ομαλή κυκλική κίνηση

Από ένα σημείο A ενός κύκλου ξεκινούν ταυτόχρονα δύο κινητά που κινούνται διαγράφοντας το πρώτο  $45^\circ$  το δευτερόλεπτο και το δεύτερο  $30^\circ$  το δευτερόλεπτο, με την ίδια κατεύθυνση.

- Ποιες οι γωνιακές ταχύτητες των κινητών;
- Πότε θα ξανασυναντηθούν τα δύο σώματα;
- Πόση γωνία θα έχει διαγράψει στο μεταξύ, κάθε κινητό;



### 2.9. Κίνηση εκκρεμούς.

Ένα σώμα μάζας 2kg ηρεμεί στο κάτω άκρο νήματος μή-

κους  $l=45\text{cm}$ . Φέρνουμε το σώμα στη θέση Α, ώστε το νήμα να γίνει οριζόντιο και το αφήνουμε να κινηθεί.

A) Ποιες προτάσεις είναι σωστές και ποιες λάθος:

- Η αρχική επιτάχυνση του σώματος είναι ίση με  $g$ .
- Η τάση του νήματος στο Α είναι μηδέν.
- Το έργο της τάσης από το Α στο Γ είναι μηδέν.
- Το έργο του βάρους από το Α στο Γ είναι ίσο με μηδέν.
- Το έργο της κεντρομόλου δύναμης είναι ίσο με μηδέν.

B) Η τάση του νήματος στην θέση Γ είναι:

- ίση με το βάρος.
- μηδέν
- Μεγαλύτερη του βάρους.
- μικρότερη του βάρους

Γ) Αυξήθηκε ή μειώθηκε η δυναμική ενέργεια του σώματος κατά την κίνησή του από το Α στο Γ και κατά πόσο;

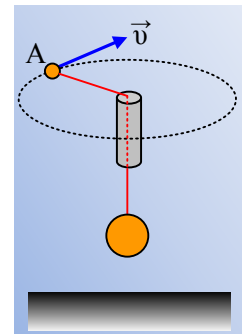
Δ) Να βρείτε την ταχύτητα του σώματος και την τάση του νήματος στο σημείο Γ.  $g=10\text{m/s}^2$ .

### 2.10. Εξασφαλίζοντας την κυκλική κίνηση

Στο σχήμα φαίνεται πώς μπορεί, μια μικρή σφαίρα Α  $m=0,1\text{kg}$  που στρέφεται διαγράφοντας οριζόντιο κύκλο ακτίνας  $R=0,4\text{m}$ , να ισορροπεί μια μάζα  $M=0,4\text{kg}$ , που κρέμεται δεμένη μέσω νήματος, από την μικρή σφαίρα Α.

- Μπορεί το νήμα που συγκρατεί την σφαίρα Α να είναι οριζόντιο;
- Με δεδομένο ότι το σφάλμα που κάνουμε, θεωρώντας οριζόντιο το νήμα, είναι ασήμαντο, να υπολογίσετε την ταχύτητα περιστροφής της σφαίρας Α.
- Αν αυξήσουμε την ταχύτητα περιστροφής της μικρής σφαίρας Α, για να εξασφαλιστεί σταθερή λειτουργία, η μεγάλη σφαίρα θα κινηθεί προς τα πάνω ή προς τα κάτω;

Δίνεται  $g=10\text{m/s}^2$ .

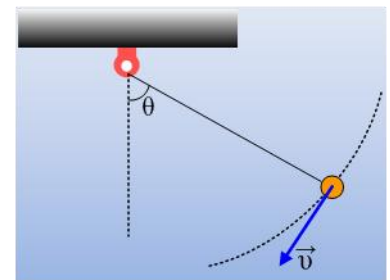


### 2.11. Κεντρομόλος και επιτρόχια επιτάχυνση

Ένα σώμα μάζας  $2\text{kg}$  είναι δεμένο στο άκρο νήματος μήκους  $l=1\text{m}$  και διαγράφει κατακόρυφο κύκλο. Όταν το νήμα σχηματίζει γωνία  $\theta=60^\circ$  με την κατακόρυφο, το σώμα έχει ταχύτητα  $2\text{m/s}$ . Για την θέση αυτή:

- Ποια η κεντρομόλος επιτάχυνση;
- Ποιο το μέτρο της τάσης του νήματος;
- Ποιος ο ρυθμός μεταβολής του μέτρου της ταχύτητας;

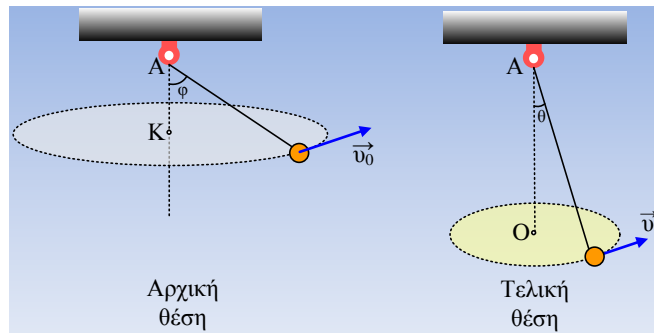
$g=10\text{m/s}^2$ .



### 2.12. Ένα κωνικό εκκρεμές που ... πέφτει.

Μια μικρή σφαίρα μάζας  $m=200\text{g}$  κρέμεται στο άκρο νήματος μήκους  $L=1\text{m}$ . Θέτουμε σε περιστροφή τη σφαίρα, ώστε να διαγράφει οριζόντιο κύκλο κέντρου Κ, σε απόσταση  $(AK)=0,2\text{m}$  από το σημείο πρόσδεσης του νήματος Α. Εξαιτίας όμως της αντίστασης του αέρα, η ταχύτητα της σφαίρας μειώνεται, με αποτέλεσμα

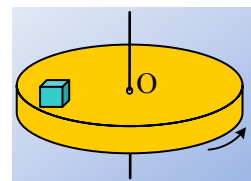
αυτή, να πέφτει σιγά-σιγά και μετά από λίγο, στρέφεται σε κύκλο κέντρου O, όπου η αντίστοιχη απόσταση είναι  $(AO)=0,9m$ .



Να υπολογιστεί η απώλεια της μηχανικής ενέργειας, εξαιτίας της αντίστασης του αέρα, μεταξύ αρχικής και τελικής θέσης. Δίνεται  $g=10m/s^2$ .

**2.13. Θα γλιστρήσει κατά την περιστροφή;**

Ένας οριζόντιος δίσκος στρέφεται γύρω από το κέντρο του με συχνότητα  $f=0,2Hz$ . Ένα σώμα A μάζας  $0,5kg$  παρουσιάζει με την επιφάνεια του δίσκου συντελεστή οριζοντικής στατικής τριβής  $\mu_s=0,4$ .

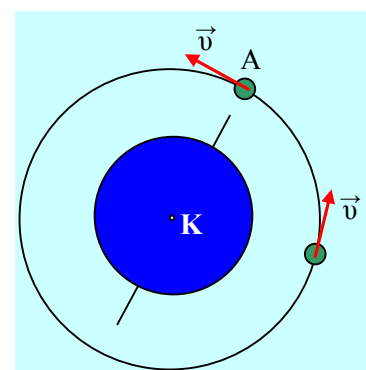


- i) Τοποθετούμε το σώμα A σε απόσταση  $R=1m$  από το κέντρο του δίσκου. Πόση είναι η τριβή που δέχεται;
- ii) Έχοντας τοποθετήσει πάνω στο δίσκο το σώμα A, αυξάνουμε πολύ αργά την συχνότητα περιστροφής του δίσκου. Ποια η μέγιστη συχνότητα περιστροφής που μπορεί να αποκτήσει ο δίσκος, χωρίς να ολισθήσει το σώμα A;

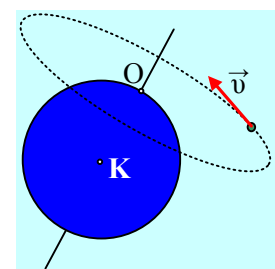
Δίνονται:  $g=10m/s^2$  ενώ  $\pi^2 \approx 10$ .

**2.14. Κυκλική κίνηση δορυφόρου.**

Ένας τεχνητός δορυφόρος της Γης, μάζας  $m=1tn$ , κινείται διαγράφοντας κυκλική τροχιά, με κέντρο το κέντρο της Γης K, στο επίπεδο του μεσημβρινού που περνά από την Αθήνα, σε ύψος  $h=R_T$ , από την επιφάνειά της, όπου  $R_T$  η ακτίνα της Γης ίση με  $6400km$ . Το χρονικό διάστημα για δυο διαδοχικές διαβάσεις του δορυφόρου πάνω από την κατακόρυφο που περνά από τον βόρειο πόλο, (σημείο A) είναι  $4h$ .



- i) Με ποια ταχύτητα στρέφεται ο δορυφόρος σε m/s και σε km/h;
- ii) Πόση δύναμη δέχεται ο δορυφόρος από τη Γη (το βάρος του δορυφόρου);
- iii) Να βρεθεί το βάρος του δορυφόρου, αν κάποια στιγμή προσγειωθεί στην επιφάνεια της Γης, όπου  $g=9,8m/s^2$ .
- iv) Προτείνεται ο δορυφόρος να τεθεί σε κυκλική τροχιά της ίδιας ακτίνας, με κέντρο τον βόρειο πόλο O, με επίπεδο παράλληλο προς τον Ισημερινό. Να

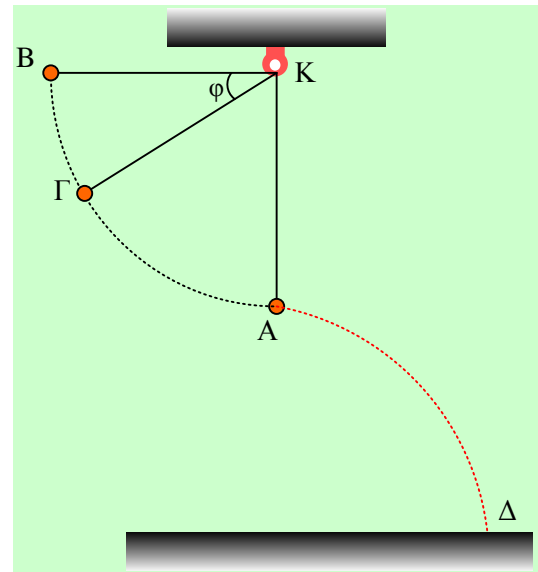


εξετάσετε αν αυτό μπορεί να γίνει ή όχι.

### 2.15. Μια οριζόντια βολή διαδέχεται μια κυκλική.

Μια μικρή σφαίρα μάζας  $0,2\text{kg}$  ηρεμεί στο κάτω άκρο νήματος μήκους  $\ell=1,25\text{m}$  (θέση Α), το άλλο άκρο του οποίου είναι δεμένο σε σταθερό σημείο Κ, το οποίο βρίσκεται σε ύψους  $H=2,5\text{m}$  από το έδαφος.

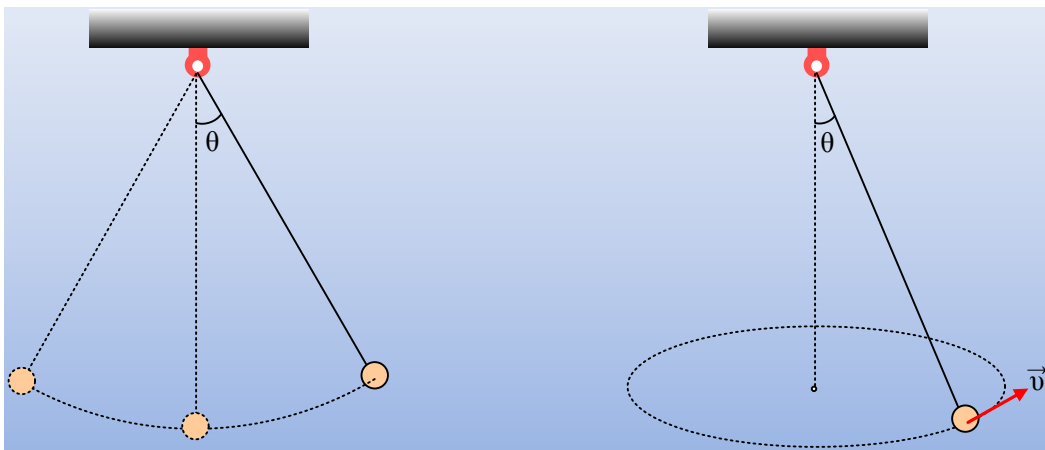
Φέρνουμε τη σφαίρα στη θέση Β, ώστε το νήμα να γίνει οριζόντιο και την αφήνουμε να κινηθεί. Τη στιγμή που το νήμα γίνεται κατακόρυφο κόβεται, οπότε τελικά η σφαίρα φτάνει στο έδαφος στο σημείο Δ.



- Να βρεθεί η αρχική επιτάχυνση της σφαίρας και η τάση του νήματος αμέσως μόλις αφεθεί να κινηθεί (θέση Β).
- Σε μια στιγμή το νήμα σχηματίζει γωνία  $\varphi=30^\circ$  με την οριζόντια διεύθυνση. Πόση είναι η τάση του νήματος στην θέση αυτή;
- Να βρεθεί η απόσταση (ΚΔ) του σημείου πρόσδεσης του νήματος και του σημείου πρόσπτωσης της σφαίρας στο έδαφος.

Δίνεται  $g=10\text{m/s}^2$ , ενώ η αντίσταση του αέρα θεωρείται αμελητέα.

### 2.16. Η συχνότητα και η ταχύτητα.



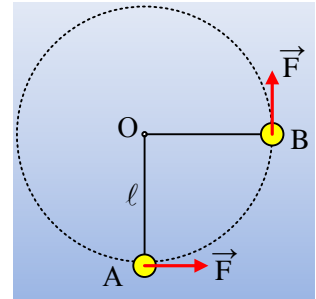
Στο άκρο ενός νήματος μήκους  $1\text{m}$ , έχουμε δέσει ένα μικρό σώμα. Εκτρέπουμε το σώμα ώστε το νήμα να σχηματίσει γωνία  $\theta=30^\circ$  με την κατακόρυφο και το αφήνουμε να κινηθεί. Το σώμα εκτελεί 5 πλήρεις αιωρήσεις σε χρονικό διάστημα  $10\text{s}$ .

- Να βρεθεί η συχνότητα της κίνησης, καθώς και ο μέγιστος ρυθμός αύξησης του μέτρου της ταχύτητας του σώματος.
- Επαναλαμβάνουμε την εκτροπή του σώματος, αλλά τώρα θέλουμε το σώμα να διαγράφει οριζόντιο κύκλο ενώ το νήμα να σχηματίζει ξανά γωνία  $\theta$ , με την κατακόρυφο. Ποια οριζόντια ταχύτητα πρέπει να προσδώσουμε στο σώμα, για να συμβεί αυτό;

iv) Να βρεθεί η συχνότητα της κίνησης αυτής, καθώς και η επιτάχυνση του σώματος.

### 2.17. Κυκλική κίνηση και ενέργειες.

Ένα σώμα μάζας 2kg ηρεμεί δεμένο στο άκρο κατακόρυφου νήματος μήκους  $\ell=1\text{m}$ , το άλλο άκρο του οποίου είναι δεμένο σε σταθερό σημείο O. Σε μια στιγμή, ασκούμε στο σώμα μια δύναμη F, εφαπτομενικά όπως στο σχήμα, μέχρι να φτάσει στη θέση B, όπου το νήμα γίνεται οριζόντιο. Στη θέση B η δύναμη F παύει να ασκείται, ενώ το έργο της για την παραπάνω μετακίνηση είναι ίσο με 100J.



i) Να υπολογίσετε το έργο του βάρους για την κίνηση από τη θέση A στη θέση B.

ii) Πόση είναι η κινητική ενέργεια του σώματος στη θέση B;

iii) Να υπολογίσετε την τάση του νήματος στις θέσεις A και B.

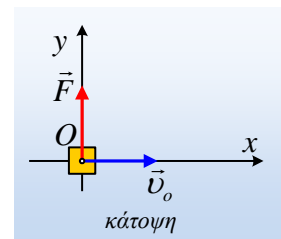
iv) Ποια η ελάχιστη κινητική ενέργεια που θα αποκτήσει στη συνέχεια κατά την περιστροφή του το σώμα και πόση θα είναι τη στιγμή αυτή η τάση του νήματος;

v) Να υπολογιστεί το μέτρο της δύναμης F, αν παραμένει σταθερό.

Δίνεται  $g=10\text{m/s}^2$ .

### 2.18. Κυκλική ή αρχή της επαλληλίας.

Ένα σώμα μάζας 2kg κινείται σε λείο οριζόντιο επίπεδο με ταχύτητα  $v_0=2\text{m/s}$ , στη διεύθυνση του άξονα x. Σε μια στιγμή ενώ περνά από ένα σημείο O, δέχεται την επίδραση μιας δύναμης F για χρονικό διάστημα  $\Delta t=2\text{s}$ . Να βρεθεί η θέση και η ταχύτητα του σώματος (μέτρο και κατεύθυνση) τη στιγμή που παύει να ασκείται η δύναμη F, στις εξής περιπτώσεις:



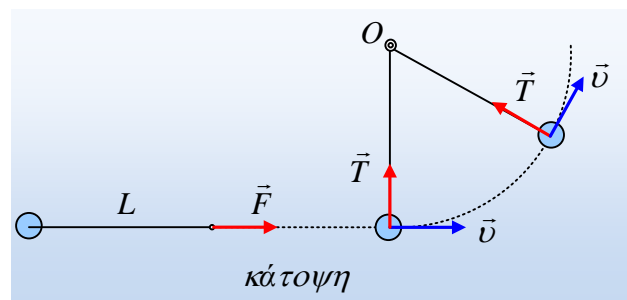
i) Η δύναμη είναι σταθερή, μέτρου  $F=2\text{N}$  με κατεύθυνση κάθετη στην ταχύτητα  $v_0$ .

ii) Η δύναμη είναι σταθερή, μέτρου  $F=2\text{N}$  και σχηματίζει γωνία  $\theta$  με την ταχύτητα  $v_0$ , όπου  $\eta\mu\theta=0,6$  και  $\sigma\upsilon\upsilon\theta=0,8$ .

iii) Η δύναμη έχει σταθερό μέτρο  $F=2\text{N}$  και είναι διαρκώς κάθετη στην ταχύτητα.

### 2.19. Ένα σώμα στο άκρο νήματος.

Ένα μικρό σώμα μάζας 0,2kg ηρεμεί σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Δένουμε το σώμα με ένα αβαρές οριζόντιο νήμα μήκους L, στο άλλο άκρο του οποίου ασκούμε μια σταθερή οριζόντια δύναμη μέτρου  $F=0,4\text{N}$ , τραβώντας το σώμα, τη στιγμή  $t_0=0$ . Τη χρονική στιγμή  $t_1=4\text{s}$ , παύουμε να τραβάμε το νήμα, το ελεύθερο άκρο του οποίου στερεώνουμε σε σταθερό

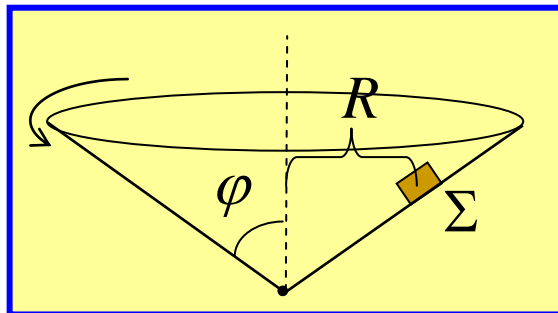


σημείο O, τη στιγμή  $t_2=5\text{s}$ , σε τέτοια θέση, έτσι ώστε το νήμα να είναι κάθετο στην ταχύτητα του σώματος, όπως στο σχήμα, οπότε το σώμα συνεχίζει να κινείται σε κυκλική τροχιά ακτίνας L. Αν η τάση του νήματος στη διάρκεια της κυκλικής κίνησης είναι δεκαπλάσια της τάσης κατά την ευθύγραμμη κίνηση, να βρεθούν:

- i) Το μέτρο της ταχύτητας κατά τη διάρκεια της κυκλικής κίνησης.
- ii) Το διάστημα που διανύει το σώμα από τη στιγμή  $t_0$  μέχρι τη χρονική στιγμή  $t_3=8s$ .
- iii) Το μήκος του νήματος.
- iv) Το έργο της τάσης του νήματος στα χρονικά διαστήματα:
  - α) από 0-4s
  - β) Από 5s-9s

**2.20. Βρείτε την ελάχιστη και τη μέγιστη απόσταση από το κέντρο.**

Ο κώνος του σχήματος περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα 4 rad/s περί κατακόρυφο άξονα.



Το σώμα  $\Sigma$  περιστρέφεται χωρίς να ολισθαίνει στην εσωτερική του επιφάνεια. Παρουσιάζει με τον κώνο τριβή με συντελεστή  $\mu = 0,5$ . Μεταξύ ποιων ορίων κυμαίνεται η απόστασή του από τον άξονα περιστροφής;

$$g = 10 \frac{m}{s^2} \quad , \quad \eta\mu\varphi = 0,8 \quad , \quad \sigma\upsilon\nu\varphi = 0,6$$