

1.4. Σύνθεση Ταλαντώσεων. Ομάδα Β'

1.4.1. Σύνθεση ταλαντώσεων ίδιας συχνότητας

Ένα σώμα εκτελεί ταυτόχρονα δύο ταλαντώσεις της ίδιας διεύθυνσης, γύρω από την ίδια θέση ισορροπίας με εξισώσεις:

$$y_1 = 0,2 \cdot \sin 10t \quad (\text{S.I.}) \text{ και}$$

$$y_2 = 0,2 \cdot \sqrt{3} \cdot \eta\mu 10t \quad (\text{S.I.})$$

- i) Να βρεθεί η εξίσωση της κίνησης που εκτελεί το σώμα.
- ii) Ποια η ταχύτητα του σώματος τη χρονική στιγμή $t_1 = \frac{\pi}{12} \text{ s}$.

1.4.2. Διαφορά φάσης στη σύνθεση ταλαντώσεων

Ένα υλικό σημείο εκτελεί ταυτόχρονα δύο ταλαντώσεις της ίδιας διεύθυνσης, γύρω από την ίδια θέση ισορροπίας με εξισώσεις:

$$y_1 = 4\eta\mu\left(4\pi t + \frac{\pi}{6}\right) \text{ και } y_2 = 4\eta\mu\left(4\pi t - \frac{\pi}{3}\right) \text{ μονάδες στο S.I.}$$

- i) Ποιες οι συχνότητες των δύο ταλαντώσεων;
- ii) Ποια η διαφορά φάσης μεταξύ τους;
- iii) Βρείτε την εξίσωση $y=f(t)$ για την απομάκρυνση του υλικού σημείου, σε συνάρτηση με το χρόνο.

1.4.3. Σύνθεση Ταλαντώσεων ίδιας συχνότητας.

Ένα υλικό σημείο εκτελεί ταυτόχρονα δύο ταλαντώσεις της ίδιας διεύθυνσης, γύρω από την ίδια θέση ισορροπίας με εξισώσεις:

$$y_1 = 4\eta\mu\left(4\pi t + \frac{2\pi}{3}\right) \text{ και } y_2 = 4\eta\mu\left(4\pi t + \frac{\pi}{6}\right) \text{ μονάδες στο S.I.}$$

- i) Ποιες οι συχνότητες των δύο ταλαντώσεων;
- ii) Ποια η διαφορά φάσης μεταξύ τους;
- iii) Βρείτε την εξίσωση $y=f(t)$ για την απομάκρυνση του υλικού σημείου, σε συνάρτηση με το χρόνο.

1.4.4. Σύνθεση ταλαντώσεων.

Ένα υλικό σημείο εκτελεί δύο ταλαντώσεις της ίδιας διεύθυνσης γύρω από την ίδια θέση ισορροπίας με εξισώσεις:

$$x_1 = 3 \cdot \eta\mu 2\pi t \text{ και } x_2 = 2 \cdot \eta\mu(2\pi t - \pi) \text{ (μονάδες στο S.I.)}$$

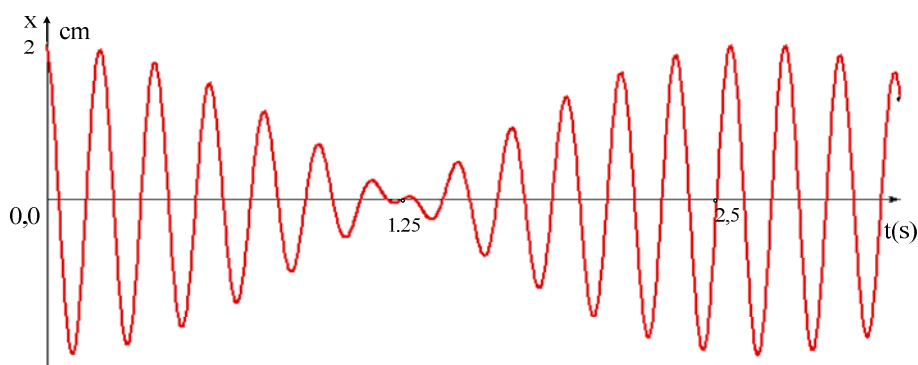
Να γίνουν τα διαγράμματα σε συνάρτηση με το χρόνο των απομακρύνσεων x_1 , x_2 και $x_{\text{ολ}}$.

1.4.5. Διακρότημα

Δύο ταλαντώσεις πραγματοποιούνται στην ίδια διεύθυνση, γύρω από την ίδια θέση ισορροπίας με εξισώσεις:

$$x_1 = A \eta\mu(10\pi t + \frac{\pi}{2}) \text{ και } x_2 = A \cdot \eta\mu(2\pi f_2 t + \frac{\pi}{2}) \text{ (S.I.)}$$

Το αποτέλεσμα της σύνθεσης παρουσιάζεται στο παρακάτω διάγραμμα.



Ζητούνται:

- i) Ποια τα πλάτη των δύο ταλαντώσεων;
- ii) Πόση είναι η περίοδος του διακροτήματος;
- iii) Η συχνότητα της δεύτερης ταλάντωσης.
- iv) Οι διαφορές φάσης μεταξύ των δύο ταλαντώσεων τις χρονικές στιγμές $t_1=1,25\text{s}$ και $t_2=2,5\text{s}$

1.4.6. Δύο ήχοι και ένα διακρότημα.

Διαθέτουμε δύο ηχητικές πηγές που παράγουν απλούς αρμονικούς ήχους με συχνότητες f_1 και f_2 . Οι δυο πηγές παράγουν ήχους ίδιας έντασης, πράγμα που σημαίνει ότι, όταν ο κάθε ήχος πέσει στο τύμπανο του αυτιού μας, το εξαναγκάζει να ταλαντωθεί με το ίδιο πλάτος. Έστω ότι η ταλάντωση του τυμπάνου εξαιτίας του πρώτου ήχου έχει απομάκρυνση:

$$x_1 = 0,002 \eta\mu(20.000\pi t + \pi) \text{ (S.I.)}$$

ενώ εξαιτίας του δεύτερου ήχου:

$$x_2 = 0,002 \cdot \eta\mu(20.004\pi t) \text{ (S.I.)}$$

- i) Να βρεθούν οι συχνότητες των δύο ήχων.
- ii) Να βρεθεί η διαφορά φάσης $\Delta\phi_{21} = \phi_2 - \phi_1$ μεταξύ των δύο απομακρύνσεων σε συνάρτηση με το χρόνο και να γίνει η γραφική της παράσταση.
- iii) Να βρεθεί η εξίσωση της απομάκρυνσης του τυμπάνου του αυτιού μας σε συνάρτηση με το χρόνο.
- iv) Ποια η συχνότητα του ήχου που αντιλαμβανόμαστε;
- v) Πόσα μέγιστα της έντασης του ήχου αντιλαμβανόμαστε σε κάθε δευτερόλεπτο;

1.4.7. Η κίνηση του ηλεκτρονίου

Ένα ηλεκτρόνιο πραγματοποιεί στην οθόνη ενός παλμογράφου δύο απλές αρμονικές ταλαντώσεις ίδιας διεύθυνσης, γύρω από την ίδια θέση ισορροπίας με εξισώσεις:

$$y_1 = 0,1\eta\mu 80\pi t \text{ και } y_2 = 0,1\eta\mu \omega_2 t \text{ (S.I)}$$

με ω_2 κοντά στην τιμή των $80\pi \text{ rad/s}$. Ο χρόνος ανάμεσα σε δύο διαδοχικές διαβάσεις του ηλεκτρονίου από

τη θέση ισορροπίας του είναι $\Delta t = \frac{1}{82}$ s.

- i) Βρείτε την γωνιακή συχνότητα της δεύτερης ταλάντωσης.
- ii) Να γράψετε της εξίσωση της συνισταμένης κίνησης και να υπολογίσετε την περίοδο μεταβολής του πλάτους της.
- iii) Να υπολογίσετε τον αριθμό των ταλαντώσεων που πραγματοποιεί το ηλεκτρόνιο μέσα σε χρονικό διάστημα ίσο με δύο περιόδους μεταβολής του πλάτους του.

1.4.8. Σύνθεση ταλαντώσεων και ισορροπία.

Ένα σώμα μάζας $m=2\text{kg}$ μετέχει ταυτόχρονα σε δύο απλές αρμονικές ταλαντώσεις που γίνονται στην ίδια διεύθυνση και γύρω από την ίδια θέση ισορροπίας. Η εξίσωση της ταχύτητας του σώματος σε συνάρτηση με το χρόνο για κάθε μία από τις επιμέρους ταλαντώσεις είναι:

$$v_1 = 8\pi \cdot \sin(\omega t + \pi) \text{ (S.I.) και } v_2 = v_{2,\max} \cdot \sin \omega t \text{ (S.I.)}$$

Η εξίσωση της σύνθετης ταλάντωσης που προκύπτει δίνεται από τη σχέση

$$x = 4 \cdot \eta\mu 100\pi t \text{ (x σε cm, t σε s)}$$

- i) Να γραφεί η εξίσωση της απομάκρυνσης για κάθε μία από τις συνιστώσες ταλαντώσεις.
- ii) Ποια θα έπρεπε να ήταν η μέγιστη επιτάχυνση του σώματος εξαιτίας της δεύτερης ταλάντωσης ώστε το σώμα να παρέμενε συνεχώς στη θέση ισορροπίας ($x=0$);

1.4.9. Σύνθεση ταλαντώσεων με παραπλήσιες συχνότητες.

Ένα υλικό σημείο εκτελεί ταυτόχρονα δύο ταλαντώσεις στην ίδια διεύθυνση, γύρω από την ίδια θέση ισορροπίας με εξισώσεις:

$$x_1 = 2\eta\mu\left(100\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$x_2 = 2\eta\mu 104\pi t \text{ (S.I.)}$$

- i) Ποιο το πλάτος της συνισταμένης ταλάντωσης και ποια η απομάκρυνση τη χρονική στιγμή $t=0$;
- ii) Ποια είναι η εξίσωση της κίνησης που εκτελεί το σώμα;
- iii) Για τις χρονικές στιγμές $t_1 = \frac{7}{8}$ s και $t_2 = \frac{9}{8}$ s, να βρεθούν
 - α) Οι φάσεις των δύο ταλαντώσεων,
 - β) Η διαφορά φάσεως μεταξύ τους.
 - γ) Το πλάτος της ταλάντωσης.

1.4.10. Δύο ήχοι και μια σύνθεση.

Διαθέτουμε δύο ηχητικές πηγές που παράγουν απλούς αρμονικούς ήχους της ίδιας συχνότητας.

Οι δυο πηγές παράγουν ήχους ίδιας έντασης, πράγμα που σημαίνει ότι, όταν ο κάθε ήχος πέσει στο τύμπανο του αυτιού μας, το εξαναγκάζει να ταλαντωθεί με το ίδιο πλάτος. Έστω ότι η ταλάντωση του τυμπάνου εξαιτίας του πρώτου ήχου έχει απομάκρυνση:

$$x_1 = 0,002 \eta\mu(1000\pi t) \text{ (S.I.)}$$

ενώ εξαιτίας του δεύτερου ήχου:

$$x_2 = 0,002 \cdot \eta\mu(1000\pi t + \frac{2\pi}{3}) \text{ (S.I.)}$$

- Ποια η συχνότητα του ήχου που ακούμε;
- Να βρεθεί η εξίσωση της απομάκρυνσης του τυμπάνου του αυτιού μας σε συνάρτηση με το χρόνο.
- Να βρείτε την ταχύτητα ταλάντωσης του τυμπάνου τη χρονική στιγμή $t_1 = 1 \text{ ms}$.

1.4.11. Η εξίσωση κίνησης

Υλικό σημείο μάζας $0,2 \text{ kg}$ κινείται ευθύγραμμα. Η εξίσωση της κίνησης δίνεται από τη σχέση:

$$y = 3\eta\mu 2\pi t + 3\sigma\upsilon\nu 2\pi t \text{ (S.I.)}$$

- Ναδειχτεί ότι το υλικό σημείο εκτελεί α.α.τ. και να βρεθούν τα χαρακτηριστικά της.
- Βρείτε τη μέγιστη δύναμη που ασκείται στο σώμα και την ενέργεια ταλάντωσης.

1.4.12. Σύνθεση ταλαντώσεων και περιστρεφόμενα διανύσματα.

Ένα σώμα μάζας 2 kg ταλαντώνεται με εξίσωση:

$$y = (2 + 2\sqrt{3}) \cdot \sigma\upsilon\nu(4\pi t) + 2\sqrt{6}\eta\mu(4\pi t - \frac{\pi}{4}) \text{ (cm)}$$

- Να αποδείξετε ότι η κίνηση του σώματος είναι γραμμική αρμονική συνάρτηση του χρόνου (ΓΑΤ) και να υπολογίσετε το πλάτος και την αρχική της φάση.
- Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής της ορμής του σώματος τη χρονική στιγμή $t_1 = 0,5 \text{ s}$.

1.4.13. Σύνθετη ταλάντωση, φάσεις και διαφορές φάσεων.

Ένα σώμα εκτελεί ταυτόχρονα δύο α.α.τ στην ίδια διεύθυνση και γύρω από την ίδια θέση ισορροπίας με εξισώσεις:

$$y_1 = 0,2 \cdot \eta\mu(20\pi t + \frac{5\pi}{6}) \text{ και}$$

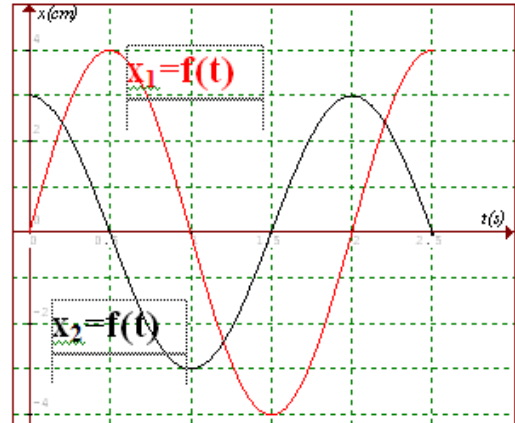
$$y_2 = 0,2 \cdot \eta\mu(21\pi t) \text{ (S.I.)}$$

- Ποια η αρχική φάση και η αρχική απομάκρυνση του σώματος εξαιτίας της σύνθετης ταλάντωσης;
- Να βρεθεί η εξίσωση της απομάκρυνσης σε συνάρτηση με το χρόνο για την σύνθετη ταλάντωση.
- Να βρεθεί η χρονική στιγμή t_1 που το πλάτος μηδενίζεται για πρώτη φορά, καθώς και η στιγμή t_2 που μεγιστοποιείται επίσης για πρώτη φορά.
- Να βρεθούν οι φάσεις των δύο ταλαντώσεων και η διαφορά φάσης μεταξύ τους τις παραπάνω χρονικές στιγμές.
- Να σχεδιάσετε τα περιστρεφόμενα διανύσματα τις χρονικές στιγμές t_1 και t_2 .

1.4.14. Σύνθετη ταλάντωση και ρυθμός μεταβολής.

Ένα σώμα μάζας $m = 1 \text{ kg}$ εκτελεί ταυτόχρονα δύο απλές αρμονικές ταλαντώσεις $x_1 = f(t)$ και $x_2 = f(t)$ της ίδιας διεύθυνσης, που πραγματοποιούνται γύρω από το ίδιο σημείο. Οι γραφικές παραστάσεις που περιγράφουν τις ταλαντώσεις αυτές δίνονται στο σχήμα.

- i) Να γράψετε τις χρονικές εξισώσεις απομάκρυνσης $x_1=f(t)$ και $x_2=f(t)$.
- ii) Να γράψετε την εξίσωση απομάκρυνσης της σύνθετης ταλάντωσης.
- iii) Να βρείτε ποια χρονική στιγμή το σώμα διέρχεται από τη θέση ισορροπίας του για δεύτερη φορά.
- iv) Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής της δυναμικής ενέργειας την χρονική στιγμή $t=5s$.



Δίνεται: $\epsilon\phi \frac{\pi}{5} = \frac{3}{4}$, $\eta\mu \frac{\pi}{5} = \frac{3}{5}$, $\sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{5} = \frac{4}{5}$, $\pi^2=10$.

1.4.15. Σύνθεση ταλαντώσεων ίδιων πλατών και όχι ακριβώς παραπλήσιων συχνοτήτων.

Ένα σώμα μάζας $m = 0,1kg$ συμμετέχει σε δύο ταλαντώσεις ίδιας διεύθυνσης και ίδιας θέσης ισορροπίας με εξισώσεις:

$$x_1 = 0,1\eta\mu 10\pi t \text{ και } x_2 = 0,1\eta\mu 12\pi t \text{ στο S.I.}$$

- i) Να γραφεί η εξίσωση θέσης του, να υπολογισθεί ο χρόνος μεταξύ δυο διαδοχικών μηδενισμών του πλάτους και να παρασταθεί γραφικά.
- ii) Να υπολογίσετε την θέση του, την ταχύτητά του και τη δύναμη που δέχεται την στιγμή $\frac{1}{3}s$.

1.4.16. Μια ιδιόμορφη ταλάντωση.

Υλικό σημείο Σ ενός ελαστικού μέσου εκτελεί περιοδική κίνηση (ιδιόμορφη ταλάντωση) της οποίας η εξίσωση απομάκρυνσης από τη θέση $\chi=0$, εκφράζεται ως επαλληλία των εξισώσεων κίνησης:

$$x_1 = 0,1\eta\mu(202\pi t)(S.I) \text{ και } x_2 = 0,1\eta\mu(198\pi t)(S.I)$$

- i) Να γραφεί η εξίσωση κίνησης του Σ
- ii) Ποιες χρονικές στιγμές μηδενίζεται ο όρος της περιοδικής κίνησης που μεταβάλλεται αργά με το χρόνο (περιβάλλουσα); Ποια χρονική στιγμή μηδενίζεται για πρώτη φορά; Ποια η φάση των δύο εξισώσεων χ_1 , χ_2 από την επαλληλία των οποίων προκύπτει η εξίσωση κίνησης του Σ , ποια η διαφορά φάσης μεταξύ τους και ποιες οι τιμές των χ_1 , χ_2 και της απομάκρυνσης χ τη στιγμή αυτή;
- iii) Ποιες χρονικές στιγμές γίνεται μέγιστος κατά απόλυτη τιμή ο όρος της περιοδικής κίνησης που μεταβάλλεται αργά με το χρόνο (περιβάλλουσα); Ποια χρονική στιγμή συμβαίνει αυτό για πρώτη φορά; Ποια η φάση των δύο εξισώσεων χ_1 , χ_2 από την επαλληλία των οποίων προκύπτει η εξίσωση κίνησης του Σ , ποια η διαφορά φάσης μεταξύ τους και ποιες οι τιμές των χ_1 , χ_2 και της απομάκρυνσης χ τη στιγμή αυτή;
- iv) Πόσες πλήρεις ταλαντώσεις της περιοδικής κίνησης εκτελεί το υλικό σημείο σε χρονικό διάστημα ίσο με αυτό που μεσολαβεί μεταξύ δύο διαδοχικών μηδενισμών της περιβάλλουσας;

1.4.17.Σύνθεση ταλαντώσεων. Ποια η διαφορά φάσης;

Δύο αρμονικές ταλαντώσεις έχουν την ίδια διεύθυνση και εξισώσεις

$$y_1=8\sqrt{3} \eta\mu 3\pi t \quad (\text{cm}) \quad \text{και}$$

$$y_2=16 \sigma\upsilon\nu \left(3\pi t + \frac{\pi}{3}\right) \quad (\text{cm})$$

- i) Ποια τα πλάτη και οι συχνότητες των δύο ταλαντώσεων και ποια η διαφορά φάσεως μεταξύ τους;
- ii) Ποια η εξίσωση της κίνησης που προκύπτει από τη σύνθεση των δύο παραπάνω ταλαντώσεων;
- iii) Να βρείτε την απομάκρυνση, την ταχύτητα και την επιτάχυνση του σημείου που κάνει τη συνισταμένη ταλάντωση κατά τη χρονική στιγμή $t_1=2\text{s}$.

1.4.18.Σύνθεση Ταλαντώσεων. Προσοχή στην φάση.

Ένα σώμα εκτελεί ταυτόχρονα δύο ταλαντώσεις της ίδιας διεύθυνσης, γύρω από την ίδια θέση ισορροπίας με εξισώσεις:

$$y_1=0,2 \cdot \sigma\upsilon\nu 10t \quad (\text{S.I.}) \quad \text{και}$$

$$y_2=0,2 \cdot \sqrt{3} \eta\mu 10t \quad (\text{S.I.})$$

- v) Να βρεθεί η εξίσωση της κίνησης που εκτελεί το σώμα.
- vi) Ποια η ταχύτητα του σώματος τη χρονική στιγμή $t_1 = \frac{\pi}{12} \text{ s}$.

1.4.19.Σύνθεση Ταλαντώσεων με διαφορετικές συχνότητες

Ένα σώμα εκτελεί ταυτόχρονα δύο ταλαντώσεις που πραγματοποιούνται στην ίδια διεύθυνση, γύρω από την ίδια θέση ισορροπίας και με εξισώσεις:

$$y_1=0,2 \eta\mu 60\pi t \quad \text{και} \quad y_2=0,2 \eta\mu \left(62\pi t - \frac{\pi}{2}\right) \quad \text{μονάδες στο S.I.}$$

- i) Να βρεθεί η εξίσωση της απομάκρυνσης του σώματος σε συνάρτηση με το χρόνο.
- ii) Ποιο το πλάτος και ποια η απομάκρυνση τη χρονική στιγμή $t_1=0$;

1.4.20.Η Σύνθεση ταλαντώσεων ίδιας διεύθυνσης και οι εκδοχές της.

A. Σώμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση και η απομάκρυνσή του περιγράφεται από την εξίσωση $x(t)=A\eta\mu(20t+\theta)$ (S.I) με $0 < \theta < \pi$. Η εξίσωση $x(t)$ μπορεί να αναλυθεί στις εξισώσεις δύο απλών αρμονικών ταλαντώσεων $x_1(t)=A_1\eta\mu(20t+\phi)$ (S.I) με $0 < \phi < \pi$ και $x_2(t)=0,2\eta\mu 20t$ (S.I), οι οποίες γίνονται στην ίδια διεύθυνση, έχουν την ίδια θέση ισορροπίας και την ίδια συχνότητα. Η ενέργεια E της ταλάντωσης με εξίσωση απομάκρυνσης $x(t)$ είναι ίση με την ενέργεια E_1 της ταλάντωσης με εξίσωση απομάκρυνσης $x_1(t)$. Όταν το σώμα εκτελεί την ταλάντωση $x(t)$, τη χρονική στιγμή $t=0$ έχει απομάκρυνση $x=0,1\sqrt{3} \text{ m}$ και ταχύτητα μέτρου 2m/s .

A₁. Να υπολογίσετε το πλάτος A_1 της ταλάντωσης με εξίσωση απομάκρυνσης $x_1(t)$.

A₂. Να γραφούν οι εξισώσεις $x(t)$ και $x_1(t)$.

- B.** Θεωρούμε ότι οι εξισώσεις $x_1(t)$ και $x_2(t)$ είναι οι εξισώσεις δύο αρμονικών ταλαντώσεων. Αυξάνουμε την τιμή της γωνιακής συχνότητας της ταλάντωσης με εξίσωση απομάκρυνσης $x_2(t)$ κατά 10% και διατηρούμε τις ίδιες συνθήκες ταλάντωσης για την ταλάντωση με εξίσωση απομάκρυνσης $x_1(t)$. Οι δύο ταλαντώσεις πραγματοποιούνται στην ίδια διεύθυνση και έχουν την ίδια θέση ισορροπίας.
- B₁** Να γράψετε την εξίσωση κίνησης του σώματος $x'(t)$ που προκύπτει από την σύνθεση των εξισώσεων $x_1(t)$ και $x_2(t)$. Στην εξίσωση $x'(t)$ να υποδείξετε έναν όρο που διαμορφώνει τα όρια για τις τιμές της απομάκρυνσης του σώματος από τη θέση ισορροπίας του και να συμβολίσετε την απόλυτη τιμή του ως $|A'|$.
- B₂** Να υπολογίσετε το πλήθος των μεγιστοποιήσεων του όρου $|A'|$, σε χρόνο $t=20T$, όπου T η περίοδος της ταλάντωσης με εξίσωση απομάκρυνσης $x(t)$.